Тәжірибелік сабақ

Тақырыбы. Жоғарғы ретті дербес туындылар мен дифференциалдар. Функцияның экстремумының анықтамасы. Функцияның шартты экстремумдары.

Бетке жүргізілген жанама жазықтық пен нормальдің теңдеулері

Есеп 1. S: $z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1$ бетіне $M_0(1,-1,2)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтық пен нормальдің теңдеуін табыңыз.

Шешуі. Жанама жазықтықтың теңдеуін қолданып,

$$z'_x(M_0)(x - x_0) + z'_z(M_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Есеп шартынан $z'_x = 4x + y + 3$; $z'_x(1,-1,2) = 4 - 1 + 3 = 6$ $z'_y = -6y + x$; $z'_y(1,-1,2) = 6 + 1 = 7$. аламыз. Онда жанама жазықтықтың теңдеунің түрі:

$$6(x-1) + 7(y+1) - (z-2) = 0$$

$$6x + 7y - z - 6 + 7 + 2 = 0$$

$$6x + 7y - z + 3 = 0$$

Ал нормальдің теңдеуін $\dfrac{x - x_0}{z'_x(M_0)} = \dfrac{y - y_0}{z'_y(M_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$ қолданып, $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+1}{7} = \dfrac{z-2}{-1}$ аламыз.

Есеп 2. $z = x^2 + y^2$ теңдеуімен берілген эллипстік параболоидтің бетіне $\mathrm{M}_0(1,1,2)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтық пен нормальдің теңдеуін табыңыз.

Шешуі. Теңдеуді $z - x^2 - y^2 = 0$ түрінде жазып, $u(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ функциясын аламыз. 1-ретті дербес туындыларын тауып, $u'_x = -2x$, $u'_y = -2y$, $u'_z = 1$ сәйкес $\mathrm{M}_0(1,1,2)$ нүктесіндегі мәндерін анықтаймыз: $u'_x(M_0) = -2$, $u'_y(M_0) = -2$, $u'_z(M_0) = 1$. Жанама жазықтық теңдеуіне қойып,

$-2(x-1) - 2(y-1) + (z-2) = 0$, яғни, $-2x - 2y + z + 2 = 0$ аламыз.

Нормальдің параметрлік теңдеуінің түрі $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ теңдеуімен анықталады.

Функцияның жоғарғы ретті туындылары

Есеп 3. $z = e^{xy} + x$. функциясының 2-ретті дербес туныдыларын табыңыз.

$$z'_x = e^{xy}y + 1, \quad z'_y = e^{xy}x, \quad z''_{yx} = e^{xy} + e^{xy}yx, \; z''_{xy} = e^{xy} + yxe^{xy} \;\Rightarrow z''_{yx} = z''_{xy}$$

Есеп №4. $z = tg\left(xy^2\right)$ функциясының екінші ретті дербес туындыларын табыңыз. $z''_{xy} = z''_{yx}$ теңдігінің орындалатынына көз жеткізіңіз.

Шешуі. $z'_x = \dfrac{1}{\cos^2\left(xy^2\right)} \cdot y^2 = \dfrac{y^2}{\cos^2\left(xy^2\right)}$

$$z''_{xx} = y^2\left(\cos^{-2}\left(xy^2\right)\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2\cos^{-3}\left(xy^2\right)\right)\left(-\sin\left(xy^2\right)\right) \cdot y^2 = \frac{2y^4 \sin\left(xy^2\right)}{\cos^3\left(xy^2\right)}$$

$$z'_y=\frac{1}{\cos^2(xy^2)}\cdot 2xy=\frac{2xy}{\cos^2(xy^2)}$$

$$z''_{yy}=2x\cdot\left(\frac{y}{\cos^2(xy^2)}\right)'_y=2x\cdot\frac{1\cdot\cos^2(xy^2)-y\cdot 2\cos(xy^2)(-\sin(xy^2))\cdot 2xy}{\cos^4(xy^2)}=$$

$$=2x\frac{\cos(xy^2)+4xy^2\sin(xy^2)}{\cos^3(xy^2)};$$

$$z''_{xy}=(z'_y)'_x=2y\cdot\left(\frac{x}{\cos^2(xy^2)}\right)'_x=2y\cdot\frac{1\cdot\cos^2(xy^2)-x2\cos xy^2(-\sin(xy^2))\cdot y^2}{\cos^4(xy^2)}=$$

$$=2y\cdot\frac{\cos(xy^2)+2xy^2\sin(xy^2)}{\cos^3(xy^2)}$$

$$z''_{yx}=(z'_x)'_y=\left(\frac{y^2}{\cos^2(xy^2)}\right)'_y=\frac{2y\cos^2(xy^2)-y^2 2\cos(xy^2)(-\sin(xy^2))\cdot 2xy}{\cos^4(xy^2)}=$$

$$=2y\frac{\cos(xy^2)+2xy^2\sin(xy^2)}{\cos^3(xy^2)};$$

Сонымен, $z''_{xy}=z''_{yx}$

Функцияның экстремумдарын табыңыз:

Есеп 5. $z=2(x+y)-x^2-y^2$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

Шешуі. Функцияның экстремумы болуының қажетті шартын қолданып, стационар нүктелерін табамыз:

$$\begin{cases} z'_x=0\\ z'_y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2-2x=0\\2-2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\Rightarrow\ A(1{,}1)$$ - берілген функцияның стационар нүктесі

z''_{xx} , z''_{xy}, z''_{yy} екінші ретті туындыларын табамыз.

$$z''_{xx}=(z'_x)'_x=(2-2x)'_x=-2;\ z''_{yy}=(z'_y)'_y=(2-2y)'_y=-2;\ z''_{xy}=0$$

Функцияның экстремум болуының жеткілікті шартын қолданып,

$\Delta=\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy}\\ z''_{xy} & z''_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=4>0\Rightarrow$ экстремумы бар екенін көреміз. $z''_{xx}=-2<0\Rightarrow$ (1,1) нүктесінде функцияның максимумы бар. $z_{\max}=z(1{,}1)=2(1+1)-1^2-1^2=4-1-1=2$

Жауабы: $z_{\max}=z(1{,}1)=2$

Есеп 6. $z=x^3+y^3-3xy$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

Шешуі: $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0\end{cases}\Rightarrow x_1=1,\ y_2=1,\ x_2=0,\ y_2=0.$

$M_1(1\,;1)$, $M_2(0;0)$ экстремумға зерттелетін екі нүкте алдық.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$.

1. $M_1(1\,;1)$ нүктесі үшін жеткілікті шартты тексереміз:

$A = 6$; $B = -3$; $C = 6 \Rightarrow \Delta = 27 > 0$, $A = 6 > 0$ мәндерінен z функциясының $M_1(1\,;1)$ нүктесінде минимумы бар болатынын көруге болады.

2. $M_2(0;0)$ нүктесі үшін жеткілікті шартты тексереміз: $A = 0$; $B = -3$; $C = 0 \Rightarrow \Delta = -9 < 0$ мәндерінен z функциясының M_2 нүктесінде экстремумы болмайтынын көруге болады.